数理解析研究所講究録
914巻 1995年 148-158

Decay of Solutions of the Wave Equation with a Local Degenerate Dissipation

九大数理学 中尾愼宏 (Mitsuhiro Nakao)

§1. 問題の説明.

Ω を R^N の有界領域として，次のような dissipation を持つ波動方程式の初期-境界値問題を考える.

$$(1)\quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \rho(x, u_t) = 0 & \text{in } \Omega \times [0, \infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{and } u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

ここで $\rho(x, u_t)$ は $a(x)|u_t|^r u_t$, $r > -1$, のようなものを念頭におく. ただし，本講演では主として線形の場合 $(r=0)$ について述べることにする. $t \to \infty$ のときの解の減衰度を調べるのが目的である. 以下，$\rho(x, u_t) = a(x) u_t$ とする.

[(A) $a(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ on $\bar{\Omega}$] のときは，通常のエネルギー法により

$$(2)\qquad E(t) \equiv \frac{1}{2}\{\|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2\} \leq C E(0) e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0.$$

が容易に示される. (くわしい結果，又は一般化については [13], [6] 参照) 書き忘れたが $a(x)$ は連続としてある.

[(B) $a(x_0)>0$ for some $x_0\in\bar{\Omega}$] のときは，最も dissipation 効果が弱い場合であるが，

(3) $$\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$$

が知られている．(N. Iwasaki [3], C. Dafermos [2]) (3)の証明には，力学系の理論的な考察と概周期解の性質にもとづく「一意接続定理」が用いられる．

(A)と(B)の中間的な場合として[8]では次のような状況が考察された．

[(C) $a(x)>0$ a.e. $x\in\bar{\Omega}$ で $\displaystyle\int_{\Omega}\frac{1}{a(x)^p}dx<\infty$, $0<\overset{\exists}{p}<1$]

このとき，

(4) $$E(t)\le C(\|u_0\|_{H_{m+1}}, \|u_1\|_{H_m})(1+t)^{-2pm/N}$$

が示されている．ただし，$m>N/2$ とし，$(u_0,u_1)\in H_{m+1}\times H_m$ は m 次の両立条件をみたすとする．この評価は，(C)のような状況では，解の減衰度は $a(x)$ の退化度 $(=1/p)$ と解の正則度 $(=m)$ に依存することを示している．(4)は quasilinear 方程式の大域解の存在と decay を示す際にも用いられる．([11])

最近，Bardos, Lebeau & Rauch [1] は指数的減衰(2)が成立するための $a(x)$ に対する必要十分条件を与えた．それは，

「$\partial\Omega$ の任意の点から出る幾何光線が，ある一定の時間 T 内にかならず $\mathrm{supp}\, a(x)\equiv\{x\in\bar{\Omega}\mid a(x)>0\}$ と交わる」

というものである．たとえば，$\partial\Omega$ の近傍で $a(x)>0$ ならこ

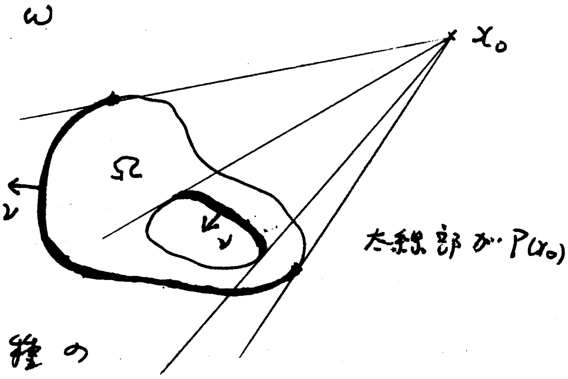
の条件はみたされる．しかし，証明には $a(x)$, $\partial\Omega$ が C^∞ 級と仮定され，いわゆる超局所解析の方法が用いられているので非線型方程式に適用するには無理があるように思われる．

一方，E. Zuazua [15] は，J.L. Lions の Control Theory [7] に登場する次の条件を採用して(2)を証明した．

[(D) $\Gamma(x_0)=\{x\in\partial\Omega \mid (x-x_0)\cdot\nu(x)\geq 0\}$ (ν は単位外法線ベクトル) とおくとき，ある $x_0\in\mathbb{R}^N$ と $\Gamma(x_0)$ のある近傍(Ω での) ω が存在して

$$a(x)\geq\varepsilon_0>0 \quad \text{in } \omega$$

となる.] (図参照)



証明法はエネルギー法 (multiplier method) と一意接続性を組み合せたもので，これはある種の半線型方程式にも適用できる．本講演の主な目的は，筆者の条件(C)と(D)の共通部分をとったもの(?)

[(C∩D) (D) における ω に対して，$a(x)>0$ a.e. $x\in\omega$ かつ $\int_\omega \frac{1}{a(x)^p}\,dx<\infty$, $0<\exists p<1$.]

という条件下で評価(4)が成立することを示すことである．

得られた結果は半線形波動方程式

$$(5)\quad \begin{cases} u_{tt}-\Delta u+a(x)u_t+f(u)=0 & \text{in } \Omega\times[0,\infty) \\ u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x) & \text{and } u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

のなめらかな大域解の存在問題につかえることを注意しておく。

次に非線型 dissipative 項の場合に触れておこう．典型例として $\rho(x,u_t)=|u_t|^r u_t$ の場合には，次のようなことが知られている：（[5, 9, 10, 12]）

$$(6)\qquad E(t)\le\begin{cases} C_0(1+t)^{-2/r} & \text{if } 0<r\le 4/(N-2)^+ \\ C_1(1+t)^{-2/r} & \text{if } 4/(N-2)^+<r\le 8/(N-4)^+ \\ C_1(1+t)^{-2\gamma} & \text{if } -1<r<0 \end{cases}$$

ただし，$\gamma\equiv\min\left(\frac{r+1}{-r},\ \frac{2}{-r(N-2)^+}\right)$，$C_0=C(E(0))$，$C_1=C(\|u_0\|_{H_2},\|u_1\|_{H_1})$ である．

我々の方法と Zuazua の方法を組み合せることにより，$\rho=a(x)|u_t|^r u_t$ で $a(x)$ が Lions の条件 (D) をみたすとしたとき $E(t)$ の減衰評価が導かれる．非線型項の場合は結果だけ述べることにする．(Theorem 2)

§2. 補題とエネルギー等式

結果の証明には次の三つの補題を本質的に用いる．

Lemma 1 (Gagriardo – Nirenberg) $1\le r<p\le\infty$, $1\le q<p$ かつ $m\ge 0$（整数）とする．このとき

$$(7)\qquad \|u\|_{W^{k,p}}\le C\|u\|^{\theta}_{W^{m,q}}\|u\|^{1-\theta}_{r}$$

が成立する．ただし

$$\theta=\left(\frac{k}{N}+\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{m}{N}+\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)^{-1}$$

で，$0<\theta\le 1$ がみたされるものとする．($p=\infty$, mq = integer のときは $0<\theta<1$.)

Lemma 2. $\phi(t)$ は $[0,\infty)$ 上の非負値関数で，差分不等式

$$\sup_{t\le s\le t+T}\phi(s)^{1+\gamma} \le g(t)\left(\phi(t)-\phi(t+T)\right)$$

をみたすとする．ただし，$T>0$, $\gamma>0$ で $g(t)$ は連続な非減少関数．このとき，

(8) $$\phi(t)\le\left\{\left(\sup_{0\le s\le T}\phi(s)\right)^{-\gamma}+\int_T^t g(s)^{-1}ds\right\}^{-1/\gamma}, \quad t\ge T,$$

が成立する．([5, 7] 参照)

Lemma 3. (一意接続性) $u\in C([0,T];\mathring{H}_1)\cap C^1([0,T];L^2)$ は波動方程式 $u_{tt}-\Delta u=0$ on $\Omega\times[0,T]$ の解で，Ω にふくまれるある開集合上で $u_t(x,t)=0$, $0\le t\le T$, とする．このとき，もし $T>\mathrm{diam}(\Omega)$ ならば，$u(x,t)\equiv 0$ on $\Omega\times[0,T]$ である．(より一般的な結果として Ruiz [14] 参照)

u を適当になめらかな(1)の解とすると，multiplier method により次の等式が成立する．

(9) $$\int_t^{t+T}\int_\Omega \rho(x,u_t)u_t\,dxds = E(t)-E(t+T) \qquad (\text{Eq.}\times u_t)$$

(10) $$\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla\cdot h\left(|u_t|^2-|\nabla u|^2\right)dxds+\sum_{i,j}\int_t^{t+T}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}dxds$$
$$+\int_t^{t+T}\int_\Omega \rho(x,u_t)\,h\cdot\nabla u\,dxds = -\left(u_t(s),h\cdot\nabla u(s)\right)\Big|_T^{t+T}+\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega} h\cdot\nu\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2dxds.$$

$(\text{Eq}\times h\cdot\nabla u)$. ここで h は vector fields.

$$(11)\quad \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \eta|\nabla u|^2\,dxds = -\left(u_t(s), \eta u(s)\right)\Big|_t^{t+T} - \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \nabla\eta\cdot u\nabla u\,dxds + \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \eta|u_t|^2\,dxds - \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \rho(x,u_t)\,\eta u\,dxds$$

(Eq × ηu).

§3. $\rho(x,u_t) = a(x)u_t$ に対する結果と略証

§1. ですでに述べた通り，次が成立する．

Theorem 1. $a \in C^m(\bar{\Omega})$, $m > N/2$ とし，条件 (C∩D) がみたされているとする．$(u_0,u_1) \in H_{m+1}\times H_m$ は m 次の両立条件をみたすとする．このとき (1) は

$$u \in \bigcap_{k=0}^{m} C^k([0,\infty); H_{m+1-k}\cap \mathring{H}_1) \cap C^{m+1}([0,\infty); L^2)$$

なる一意解を持ち，評価(4)，よりくわしくは次が成立する：

$$(4)'\quad E(t) \le \left\{E(0)^{-N/2mp} + C_m\,(t-T)^+\right\}^{-2mp/N}, \quad t \ge 0.$$

注. 上の定理では $\sum_{i=0}^{m+1} \left\|\frac{\partial^i}{\partial t^i}u(t)\right\|^2_{H_{m+1-i}} \le C_m < \infty$ が出るので，(4) から

$$(4)''\quad \sum_{i=0}^{k+1} \left\|\frac{\partial^i}{\partial t^i}u(t)\right\|^2_{H_{k+1-i}} \le C_m\,(1+t)^{-2(m-k)p/N}$$

$(1\le i\le k\le m)$ が成立することになる．

<u>Theorem 1 の略証</u>

存在定理はよく知られているので評価(4)′を導くことにする．

まず (9) より

$$(9)'\quad \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega a(x)|u_t|^2\,dxds = E(t) - E(t+T) \equiv D(t)^2.$$

次に (10), (11) において，それぞれ $h(x) = x - x_0$, $\eta(x) \equiv 1$ をとり，それらを組み合せると

(12) $\displaystyle\int_t^{t+T} E(s)\,ds \le C\{E(t+T) + E(t)\} + C\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 dx\,ds$

を得る．

続いて，$\Gamma(x_0) \subset \hat{\omega} \subset \omega$ なる開集合 $\hat{\omega}$ (in $\overline{\Omega}$) をとり，η を $0 \le \eta < 1$, $\eta = 1$ on $\hat{\omega}$, $\eta = 0$ on Ω/ω かつ $|\nabla\eta|^2/\eta \in L^\infty$ なるものをとると，(11) から

(13) $\displaystyle\int_t^{t+T}\int_\Omega \eta|\nabla u|^2 dx\,ds \le C\,(E(t) + E(t+T)) + C\int_t^{t+T}\int_\omega (|u_t|^2 + |u|^2)\,dx\,ds$

を得る．

さらに，R^N の開集合 $\tilde{\omega}$ を $\tilde{\omega} \cap \overline{\Omega} \subset \omega$ となるようにとり，C^1 級 vector field $h(x)$ を

$h = \nu$ on $\Gamma(x_0)$, $h\cdot\nu \ge 0$ on $\partial\Omega$ かつ $h = 0$ on $\Omega/\tilde{\omega}$

となるものとすると，(10) から

(14) $\displaystyle\left(\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 dx\,ds \le\right) \int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega} (h\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma\,ds$

$$\le C\int_t^{t+T}\int_{\tilde{\omega}} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2)\,dx\,ds + C\,(E(t) + E(t+T)).$$

$TE(t+T) \le \displaystyle\int_t^{t+T} E(s)\,ds$ に注意して，T を十分大きくとると (9)′, (12), (13), (14) より

(15) $\displaystyle E(t+T) \le C\left\{D(t)^2 + \int_t^{t+T}\int_\omega (|u_t|^2 + |u|^2)\,dx\,ds\right\}$

を得る．

ここで，次の命題が肝要となる．

Proposition 1. $T > \mathrm{diam}(\Omega)$ としておけば，ある定数 C に対して，

$$(16) \quad \int_t^{t+T} \|u(s)\|^2 ds \le C \left\{ D(t)^2 + \int_t^{t+T}\int_\omega |u_t|^2 dx ds \right\}.$$

この命題の証明は，背理法を用いて Lemma 3 に帰着させることによってなされる．実際，(16) が不成立とすれば，

$$\int_{t_n}^{t_n+T} \|u(s)\|^2 ds \geq n \left\{ \int_{t_n}^{t_n+T}\int_\Omega a(x)|u_t|^2 dx ds + \int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega |u_t|^2 dx ds \right\}$$

となる数列 $\{t_n\}$ がとれる．そこで $\lambda_n \equiv \int_{t_n}^{t_n+T} \|u(s)\|^2 ds$ とおき，$v_n(t) \equiv u(t+t_n)/\sqrt{\lambda_n}$，$0 \le t \le T$，とおくと $v(t) = \lim_{n\to\infty} v_n(t)$ (in $L^2(\Omega \times [0,T])$) は次をみたすことになる．

「$v \in C^1([0,T];L^2) \cap C([0,T];\mathring{H}_1)$ で $v_{tt} - \Delta v = 0$ in $\Omega \times [0,T]$，さらに $v_t(t) \equiv 0$ on $\omega \times [0,T]$ かつ $\int_0^T \|v(t)\|^2 dt = 1$．」

Lemma 3 より $v(t) \equiv 0$ on $\Omega \times [0,T]$ となるが，これは最後の条件に矛盾している．

さて，(15)，(16) より

$$(17) \quad E(t) \le C \left\{ D(t)^2 + \int_t^{t+T}\int_\omega |u_t|^2 dx ds \right\}$$

を得る．ここでさらに，

$$\int_t^{t+T}\int_\omega |u_t|^2 dx ds \le \left(\int_t^{t+T}\int_\omega a|u_t|^2 dx ds\right)^{p/(p+1)} \left(\int_t^{t+T}\int_\omega a^{-p} dx ds\right)^{1/(p+1)} \times \sup_{t \le s \le t+T} \|u_t(s)\|_\infty^{2/(p+1)}$$

$$\le C\, D(t)^{2p/(p+1)} \sup_{t \le s \le t+T} \|u_t(s)\|^{2(1-N/2m)/(p+1)} \|u_t(s)\|_{H_m}^{N/m(p+1)}$$

$$(18) \qquad \le C_m\, D(t)^{2p/(p+1)}\, E(t)^{(2m-N)/2m(p+1)}$$

(17), (18) から差分不等式

$$(19) \qquad E(t)^{1+N/2mp} \le C_m^{N/mp} \left(E(t) - E(t+T) \right)$$

を得る．これに Lemma 2 を適用して (4)′ が導かれる．

§4. 非線型 dissipative 項の場合．

$\rho(x,u)$ について次を仮定する．

仮定 $\rho(x,u) \in C(\overline{\Omega} \times R)$，$u \neq 0$ で微分可能で次をみたすとする．

(1) $a(x)|u|^{r+2} \le \rho(x,u)u \le k_0\, a(x)\left(|u|^{r+2} + |u|^2\right)$ if $|u| \le 1$,

(2) $a(x)|u|^{p+2} \le \rho(x,u)u \le k_1\, a(x)\left(|u|^{p+2} + |u|^2\right)$ if $|u| \ge 1$,

(3) $\frac{\partial}{\partial u}\rho(x,u) \ge 0 \qquad (u \neq 0)$,

ただし，$-1 < r < \infty$，$-1 \le p \le 2/(N-2)^+$ $\quad (-1 \le p < \infty$ if $N=1,2)$

とし，$a(x)$ は条件 (D) をみたすものとする．

Theorem 2. $(u_0, u_1) \in H_2 \cap \mathring{H}_1 \times \mathring{H}_1$ とする．このとき，上の仮定の下で，(1) は

$$u \in W^{2,\infty}([0,\infty); L^2) \cap W^{1,\infty}([0,\infty); \mathring{H}_1) \cap L^\infty([0,\infty); H_2)$$

なる一意解をもち，u は次の評価をみたす．

$$(20) \qquad E(t) \le C_1 (1+t)^{-2\gamma},$$

ここで，ηは次のように定められる：

(i) $r \geq 0$ かつ $0 \leq p \leq 2/(N-2)^+$ なら $\eta = \min\{1/r, 2(p+1)/p(N-2)^+\}$

(ii) $r \geq 0$ かつ $-1 \leq p < 0$ なら $\eta = \min\{1/r, -2/p(N-2)^+\}$

(iii) $-1 < r < 0$ かつ $0 \leq p \leq 2/(N-2)^+$ なら $\eta = \min\{-(r+1)/r, 2(p+1)/p(N-2)^+\}$

(iv) $-1 < r < 0$ かつ $-1 \leq p < 0$ なら $\eta = \min\{-(r+1)/r, -2/p(N-2)^+\}$

(とくに，$p = r = 0$ ならば通常のエネルギー有界解に対して指数的減衰が導かれる.)

Theorem 2 の証明の方針は基本的に Theorem 1 と同じであるが，非線型項の処理に新しい工夫が必要である．とくに，"3" 3 つの段階で Lemma 1 を駆使することになる．

References

1. C.Bardos, G.Lebeau and J.Rauch ,*Sharp sufficient conditions for the observation, controle and stabilization of waves from the boundary,* SIAM J. Control and Optimiz., 30 (1992), 1024-1065.

2. C.Dafermos,*Asymptotic behaviour of solutions of evolution equations,* M.G.Crandall Ed., Academic Press,New York, 1978, 103-123.

3. N.Iwasaki,*Local decay of solutions for symmetric hyperbolic systems with dissipative and coercive boundary conditions in exterior domains,* Publ.R.I.M.S., Kyoto Univ., 5(1969), 193-218.

4. J.L.Lions ,*Exact controllability , stabilization and perturbations for distributed systems,* SIAM Rev., 30 (1988) ,1-68.

5. M.Nakao, *Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with nonlinear dissipative term,* J. Math. Anal. Appl., 58 (1977), 336-343.

6. M.Nakao, *Decay of solutions of some nonlinear evolution equations,* J. Math. Anal. Appl.,60(1977), 542-549.

7. M.Nakao, *A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equations,* J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 747-762.

8. M.Nakao, *Energy decay for the wave equation with a degenerate dissipative term,* Proc. Royal Soc. Edinburgh A 100(1985),19-27.

9. M.Nakao, *On the decay of solutions of some nonlinear dissipative wave equations in higher dimensions,* Math. Z., 193 (1986), 227-234.

10. M.Nakao, *On solutions of the wave equation with a sublinear dissipative term,* J. Diff. Eqns., 69 (1987),204-215.

11. M.Nakao, *Existence of global smooth solutions to the initial-boundary value problem for the quasi-linear wave equation with a degenerate dissipative term,* J. Diff. Eqns.,98(1992), 299-327.

12. M.Nakao, *Energy decay for the wave equation with a nonlinear weak dissipation,* Diff. and Integ. Eqns. (1994), to appear.

13. J.Rauch and Taylor, *Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domain,* Indiana Univ. Math. J.,24(1974), 79-86.

14. A.Ruiz, *Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential,* J. Math. Pures Appl.,71(1992), 455-467.

15. E.Zuazua, *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping,* Comm. P.D.E.,15 (1990), 205-235.